

6.8. DVODIMENZIONALNA PREKIDNA DISTRIBUCIJA

Distribucije o kojima je do sada bilo reči počivaju na jednoj promenljivoj pa otuda i naziv jednodimenzionalne distribucije. Kada su u osnovi rasporeda dve

promenljive, onda je reč o *dvodimenzionalnoj distribuciji*. Ako te promenljive označimo X i Y , distribucija dvodimenzionalnog skupa počiva na sledećim parovima vrednosti

$$X : x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Za ilustraciju uzmimo eksperiment sa bacanjem dve kocke. Mogući ishodi sa odgovarajućim verovatnoćama prikazani su u tabeli 6.3. Verovatnoća $\frac{1}{36}$ u prvom redu i prvoj koloni pokazuje jedan mogući ishod. Pored toga, u poslednjem redu i poslednjoj koloni tabele 5.3. prikazane su i verovatnoće jednodimenzionalnih distri-

Dvodimenzionalna distribucija na osnovu ishoda eksperimenta sa bacanjem dve kocke

Tabela 6.3.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	Ukupno X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$.	.	.	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$
3
4
5
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Ukupno Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

bucija za X i Y koje se nazivaju *marginalne distribucije*. Verovatnoća svakog njihovog ishoda je u ovom slučaju, kao i kod jednodimenzionalne distribucije, identična za sve X i Y i iznosi $1/6$.

Ova diskusija može da se prikaže na nešto formalniji način. Verovatnoću da će promenljiva X uzeti vrednost x_i označićemo $p_i = P(X = x_i)$. Na sličan način verovatnoća za Y je $p_j = P(Y = y_j)$. U slučaju dvodimenzionalne distribucije imamo $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Zakon verovatnoće dvodimenzionalnog rasporeda počiva na dva uslova: $1/p_{ij} \geq 0$, za sve vrednosti promenljivih X i Y i $2/\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$. U primeru sa bacanjem dve kocke oba ova uslova su ispunjena. Marginalnu distribuciju možemo izraziti kao

$$p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^m p_{ij},$$

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

Kod dvodimenzionalnih rasporeda *uslovne verovatnoće* mogu da se utvrde po dve osnove i to: *uslovni raspored verovatnoća obeležja Y za fiksno X i uslovni raspored verovatnoća obeležja X za fiksno Y*. Polazeći od uslovnih verovatnoća datih formulama 5.5. i 5.6, uslovni raspored verovatnoća za Y je

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}, \quad (6.33)$$

dok je uslovni raspored verovatnoća za X

$$P(Y = y_j | X = x_i) = p_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}. \quad (6.34)$$

U slučaju eksperimenta sa dve kocke sve uslovne verovatnoće su jednake marginalnim verovatnoćama i rezultat su dva *nezavisna događaja*. Tako, uslovna verovatnoća da je 4 dobijeno kod drugog bacanja pod uslovom da je 3 dobijeno kod prvog, jednaka je marginalnoj verovatnoći da se 4 dobije kod drugog bacanja

$$p_{4|3} = \frac{p_{34}}{p_{3.}} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6.$$

Tabela 6.4. pokazuje hipotetičan dvodimenzionalni raspored zaposlenih radnika u jednoj tvornici prema polu i starosti u apsolutnim i relativnim frekvencijama. Obeležje X (tri grupe starosti) uzima vrednosti 1, 2, 3, a obeležje Y (pol) 1, 2. Verovatnoća da će se na slučajan način izabrati jedan radnik ispod 25 godina i da je muškog pola je

$$P(X = 1, Y = 1) = p_{11} = 0,1250.$$

Marginalna verovatnoća da su radnici ispod 25 godina je

$$P(X = 1) = p_{1.} = 0,250.$$

Uslovna verovatnoća da je izabrano lice muško i ispod 25 godina je

$$P(Y = 1 | X = 1) = p_{1|1} = \frac{p_{11}}{p_{1.}} = \frac{0,125}{0,250} = 0,5.$$

Raspored radnika prema polu i starosti

Tabela 6.4.

a) Apsolutne frekvencije

Pol	Grupe starosti			Ukupno
	Manje od 25 godina, (1)	od 25 do 45 godina, (2)	Preko 45 godina, (3)	
Muško, (1)	100	300	100	500
Žensko, (2)	100	150	50	300
Ukupno	200	450	150	800

b) Relativne frekvencije

Pol	Grupe starosti			Ukupno
	Manje od 25 godina, (1)	od 25 do 45 godina, (2)	Preko 45 godina, (3)	
Muško, (1)	0,1250	0,3750	0,1250	0,6250
Žensko, (2)	0,1250	0,1875	0,0625	0,3750
Ukupno	0,2500	0,5625	0,1875	1,0000

6.9. ZAJEDNIČKA NORMALNA DISTRIBUCIJA DVE PROMENLJIVE

Kod dve nezavisne slučajne promenljive X i Y sa normalnim rasporedom, zajednička normalna distribucija je proizvod njihovih marginalnih distribucija

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) \quad (6.35)$$

Marginalne distribucije za X i Y su jednodimenzionalne normalne distribucije date obrascem (6.23). Funkcija $f(x, y)$ zavisi od očekivane vrednosti za X, μ_1 , standardne devijacije za X, σ_1 , očekivane vrednosti za Y, μ_2 i standardne devijacije za Y, σ_2 . Ukoliko su X i Y zavisne slučajne promenljive funkcija $f(x, y)$ ima nešto složeniji oblik i zavisi od dodatnog parametra ρ koji izražava njihovu međuzavisnost. Dvodimenzionalna normalna distribucija se može grafički prikazati pomoću stereograma (sl. 8.7.).

Dvodimenzionalna normalna distribucija ima uslovne distribucije Y za fiksno X, i X za fiksno Y, koje su jednodimenzionalne normalne distribucije. Matematička očekivanja uslovnih distribucija su

$$E(Y|X) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \mu_1) \quad (6.36)$$

i

$$E(X|Y) = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (Y - \mu_2). \quad (6.37)$$

Na ovom svojstvu uslovne normalne distribucije izgrađene su teorijske osnove proste linearne regresije.