Jednofaktorska analiza varijanse (Potpuno slučajan raspored)

Da bi se ispitao uticaj četiri vrste mineralnog đubriva na porast biljke (cm), homogeno polje je podeljeno na 12 jednakih parcela, i svaka vrsta đubriva je primenjena na tri slučajno odabrane parcele. Rezultati eksperimenta dati su u tabeli:

Đubriva	Visina (cm)			Zbir	Sredina
A	11,9	11,0	11,8	34,7	11,57
B	11,6	11,8	12,2	35,6	11,87
C	9,6	11,1	9,9	30,6	10,20
D	10,4	11,0	10,7	32,1	10,70

a) Testirati nultu hipotezu da ne postoji statistička razlika u prosečnom eksperimentalnom rezultatu u zavisnosti od primenjenog tretmana.

b) Uporediti parove sredina tretmana primenom: t-testa, testa najmanje značajne razlike (NZR-testa) i višestrukog intervalnog (Dankanovog) testa.

Rešenje:

a) U ovom eksperimentu izvedenom po planu potpuno slučajnog rasporeda ispituje se uticaj jednog faktora, mineralnog đubriva, na porast biljke. Nivoi faktora ili tretmani su vrste primenjenih đubriva. Broj nivoa faktora ili broj tretmana se označava sa k. Kako je primenjeno četiri đubriva, k=4.

$n_i \; (i=1,\dots,k)$ - veličina uzorka iz i-te populacije $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3$

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ - ukupna veličina uzorka ili ukupan broj eksperimentalnih jedinica $N = 3 \cdot 4 = 12$

Zbir obeležja u i-tom uzorku ili zbir (suma) tretmana $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$

Ukupan zbir tretmana: $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$

T_1=34,7 T_2=35,6 T_3=30,6 T_4=32,1 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 133$

Aritmetičke sredine i-tog uzorka $\bar{X}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$

$\bar{X}_1 = \dfrac{34,7}{3} = 11,57$ $\bar{X}_2 = \dfrac{35,6}{3} = 11,87$ $\bar{X}_3 = \dfrac{30,6}{3} = 10,2$ $\bar{X}_4 = \dfrac{32,1}{3} = 10,7$

Totalni (ukupni) varijabilitet podataka: $Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} X_{ij}^2 - C \qquad C = \frac{T^2}{N}$

$$Q = 11,9^2 + 11,0^2 + 11,8^2 + \dots + 10,7^2 - \frac{133^2}{12} = 1481,52 - 1474,0833 = 7,4367$$

Suma kvadrata između grupa ili suma kvadrata tretmana:

$$Q_T = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C \qquad Q_T = \frac{4438,22}{3} - \frac{133^2}{12} = 1479,4067 - 1474,0833 = 5,3234$$

Suma kvadrata unutar grupa ili suma kvadrata pogreške (reziduala):

$$Q_P = Q - Q_T \qquad Q_P = Q - Q_T = 7,4367 - 5,3234 = 2,1133$$

Sredina sume kvadrata tretmana: $s_T^2 = \frac{Q_T}{k-1} \qquad s_T^2 = \frac{5,3234}{3} = 1,7745$

Sredina sume kvadrata pogreške: $s_P^2 = \frac{Q_P}{N-k} \qquad s_P^2 = \frac{2,1133}{8} = 0,2642$

Za testiranje $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ protiv alternativne hipoteze $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ za bar jedan par i,j (i<j) koristi se statistika $F = \frac{s_T^2}{s_P^2}$ koji ako je nulta hipoteza tačna ima Fišerovu raspodelu sa k-1 i N-k stepena slobode. $F = \frac{1,7745}{0,2642} = 6,72.$ Kako je $F_{3,8;0,05} = 4,07$ i $F_{3,8;0,01} = 7,59$ sledi da se nulta hipoteza odbacuje na pragu značajnosti 5%

TABELA ANALIZE VARIJANSE

Izvor varijacije	Stepeni slobode	Zbir kvadrata	Sredina zbira kvadrata	F	$F_{0,05}$	$F_{0,01}$
Tretmani	3 (k-1)	5,3234	1,7745	6,72 *	4,07	7,59
Pogreška	8 (N-k)	2,1133	0,2642			
Ukupno	11 (N-1)	7,4367				

b) **Poređenje parova tretmana**

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \qquad i<j$$
$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

$$s_P^2 = \frac{2,1133}{8} = 0,2642$$

$T_1 = 34,7$ $\qquad \bar{X}_1 = \frac{34,7}{3} = 11,57$

$T_2 = 35,6$ $\qquad \bar{X}_2 = \frac{35,6}{3} = 11,87$

$T_3 = 30,6$ $\qquad \bar{X}_3 = \frac{30,6}{3} = 10,2$

$T_4 = 32,1$ $\qquad \bar{X}_4 = \frac{32,1}{3} = 10,7$

$$s_{\bar{x}_i - \bar{x}_j} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2642}{3}} = 0,4197$$

1. t-test

$t_1 = \frac{11,57-11,87}{0,4197} = -0,71$ $\qquad t_4 = \frac{11,87-10,2}{0,4197} = 3,98^{**}$

$t_2 = \frac{11,57-10,2}{0,4197} = 3,26^{*}$ $\qquad t_5 = \frac{11,87-10,7}{0,4197} = 2,79^{*}$

$t_3 = \frac{11,57-10,70}{0,4197} = 2,07$ $\qquad t_6 = \frac{10,2-10,7}{0,4197} = -1,19$

$t_{8;0,05} = 2,306 \qquad t_{8;0,01} = 3,355$

2. Test najmanje značajne razlike-NZR test

$$NZR_{N-k;\alpha} = t_{N-k;\alpha} \cdot s_{\bar{x}_i - \bar{x}_j}$$

$$NZR_{8;0,05} = 2,306 \cdot 0,4197 = 0,9678$$

$$NZR_{8;0,01} = 3,355 \cdot 0,4197 = 1,4081$$

	$\bar{x}$	$\bar{x}-\bar{x}_3$	$\bar{x}-\bar{x}_4$	$\bar{x}-\bar{x}_1$
$\bar{x}_2$	11,87	1,67**	1,17*	0,3
$\bar{x}_1$	11,57	1,37*	0,87	
$\bar{x}_4$	10,7	0,5		
$\bar{x}_3$	10,2			

3. Višestruki intervalni-Dankanov test

Ocena standardne greške aritmetičke sredine tretmana je:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0,2642}{3}} = 0,2968$$

Iz tabele za višestruki intervalni test se za N-k stepeni slobode čita k-1 vrednosti. Broj stepeni slobode je jednak broju stepeni slobode pogreške, dok je broj vrednosti za jedan manji od broja aritmetičkih sredina koje se porede.

Tablične vrednosti za višestruki intervalni test α=0,05 su: **3,26 3,39 3,47**

Kritične vrednosti

se izračunavaju kao proizvod tabličnih vrednosti i ocene standardne greške aritmetičke sredine tretmana:

3,26 3,39 3,47/· 0,2968

$\boxed{\mathbf{0{,}97 \quad 1{,}01 \quad 1{,}03}}$

Tablične vrednosti iz tabele vrednosti za višestruki intervalni test α=0,01

4,74 5,00 5,14

Kritične vrednosti su:

4,74 5,00 5,14/· 0,2968

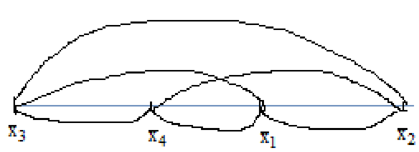
$\boxed{\mathbf{1{,}41 \quad 1{,}48 \quad 1{,}53}}$

$\bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 1{,}67^{**} > 1{,}03(1{,}53)$ $\qquad$ $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0{,}3 < 0{,}97$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 1{,}37^{*} > 1{,}01(< 1{,}48)$ $\qquad$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_4 = 0{,}87 < 0{,}97$

$\bar{x}_2 - \bar{x}_4 = 1{,}17^{*} > 1{,}01(< 1{,}48)$ $\qquad$ $\bar{x}_4 - \bar{x}_3 = 0{,}5 < 0{,}97$

Prvo se porede maksimalna i minimalna aritmetička sredina tretmana između kojih je (k-1) intervala sa najvećom kritičnom vrednosti (1,03 za prag značajnosti 5% i 1,53 za 1%). To su $\bar{x}_2, \bar{x}_3$ između kojih je tri intervala. Zatim se porede aritmetičke sredine tretmana između kojih je (k-2) interval sa manjom kritičnom vrednošću. U ovom slučaju postoje dva poređenja kod kojih je dva interval između aritmetičkih sredina $\bar{x}_1, \bar{x}_3$ i $\bar{x}_2, \bar{x}_4$, a kritične vrednosti su 1,01 za prag značajnosti 5% i 1,48 za 1%. U sledećem poređenju se porede aritmetičke sredine tretmana između kojih je (k-3) interval sa sledećom manjom kritičnom vrednošću. Kako je u ovom slučaju k-3=1 postoje tri poređenja $\bar{x}_2, \bar{x}_1$ i $\bar{x}_1, \bar{x}_4$ i $\bar{x}_4, \bar{x}_3$, dok su kritične vrednosti 0,97 za α=0,05 i 1,41 za α=0,01.



Na osnovu sva tri primenjena testa može da se zaključi da postoji visoko statistički značajna razlika u porastu biljke između druge i treće (B i C) vrste mineralnih đubriva i statistički značajna razlika između prve i treće (A i C) i druge i četvrte (B i D) vrste mineralnih đubriva.