

Binomna distribucija

1. Ako su $n = 10$ i $p = 0,6$ parametri binomne distribucije izračunati a) aritmetičku sredinu b) varijansu c) modus d) prvi i drugi Pirsonov koeficijent.

a) $\bar{X} = 10 \cdot 0,6 = 6$ b) $\sigma^2 = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4$ c) $11 \cdot 0,6 - 1 \leq k \leq 11 \cdot 0,6$

$5,6 \leq k \leq 6,6 \Rightarrow k=6$ $M_0 = 6$

d) $\beta_1 = \frac{(0,4 - 0,6)^2}{2,4} = 0,01667$ $\beta_2 = 3 + \frac{1 - 6 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{2,4} = 2,8167$

2. U proizvodnji jednog prehrambenog proizvoda 5% proizvoda ne odgovara standardu. Izračunati verovatnoću da će prost slučajni uzorak od 15 proizvoda sadržati 3 neispravna proizvoda, pretpostavljajući da je izbor uzorka sa ponavljanjem. Koliki je najverovatniji broj neispravnih proizvoda?

$$p_3 = \binom{15}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{12} = 0,0307329$$

$16 \cdot 0,05 - 1 \leq k \leq 16 \cdot 0,05 \Rightarrow -0,2 \leq k \leq 0,8$ $k = 0$

3. Slučajna promenljiva X uzima vrednosti 0, 1, 2, 3, 4. Na osnovu realizacije uzorka dobijena je distribucija frekvencija:

X	0	1	2	3	4
f	67	122	94	38	3

Ispitati saglasnost date empirijske distribucije frekvencija sa teorijskom binomnom distribucijom poređenjem apsolutnih empirijskih i teorijskih frekvencija.

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{436}{324} = 1,3457 \quad \bar{X} = n \cdot p = 4 \cdot p \Rightarrow p = \frac{1,3457}{4} = 0,3364$$

$$p_0 = \binom{4}{0} \cdot 0,3364^0 \cdot 0,6636^4 = 0,19392 \Rightarrow F_0 = 324 \cdot 0,19392 = 62,83 \approx 63$$

$$p_1 = \binom{4}{1} \cdot 0,3364^1 \cdot 0,6636^3 = 0,39322 \Rightarrow F_1 = 324 \cdot 0,39322 = 127,40 \approx 127$$

$$p_2 = \binom{4}{2} \cdot 0,3364^2 \cdot 0,6636^2 = 0,29900 \Rightarrow F_2 = 324 \cdot 0,29900 = 96,88 \approx 97$$

$$p_3 = \binom{4}{3} \cdot 0,3364^3 \cdot 0,6636^1 = 0,10105 \Rightarrow F_3 = 324 \cdot 0,10105 = 32,74 \approx 33$$

$$p_4 = \binom{4}{4} \cdot 0,3364^4 \cdot 0,6636^0 = 0,012806 \Rightarrow F_4 = 324 \cdot 0,012806 = 4,15 \approx 4$$

4. Izračunati verovatnoću da se dobije zbir 9 a) dva puta b) najmanje dva puta u 5 bacanja dve kocke?

Rešenja:

Prilikom jednog bacanja dve kocke, zbir devet se može javiti u 4 slučaja: (3,6), (4,5), (6,3), (5,4), dok je broj mogućih realizacija u jednom bacanju dve kocke 36, pa je verovatnoća da se prilikom jednog bacanja dve kocke dobije zbir 9 jednaka $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Broj dobijanja zbira 9 u 5 bacanja dve kocke je slučajna promenljiva X koja ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = 5$, $p = \frac{1}{9}$.

$$a) P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 = 0,0867$$

$$b) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 -$$

$$\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0,09824$$

5. Ako jedna mašina proizvodi 20% defektnih proizvoda odrediti verovatnoću da između četiri slučajno odabrana proizvoda bude: a) 1 b) 0 c) najviše dva defektna.

R: a) 0,4096 b) 0,4096 c) 0,9728.

6. Izračunati verovatnoću da se u 6 bacanja dve kocke dobije zbir strana 9:

a) dva puta b) najmanje dva puta.

R: a) 0,1156 b) 0,1368

7. U proizvodnji izvesnih proizvoda na 100 proizvoda pojavljuje se 75 prve vrste. Na slučajan način se bira 5 proizvoda. Ako X označava broj proizvoda prve vrste između 5 izabranih, naći raspodelu verovatnoća, aritmetičku sredinu, varijansu i Pirsonove koeficijente.

8. Verovatnoća realizacije događaja A u jednom eksperimentu iznosi 0,75. Izračunati najverovatniji broj realizacija događaja u 5 nezavisnih ponavljanja eksperimenta i odgovarajuću verovatnoću.

R: $M_0 = 4$, $p_4 = 0,3955$

9. U jednom ciklusu rada automat proizvodi jednu vrstu proizvoda, pri čemu je verovatnoća pojave škarta 0,01. Koliki uzorak proizvoda treba da se odabere da verovatnoća pojave bar jednog škarta nije manja od 0,95?

R: $n \geq 298$

10. Prirodna smrtnost komaraca u toku prvih 5 dana iznosi 0.3. Izračunati verovatnoću da u grupi od 3 insekta: a) nijedan neće preživeti 5 dana b) da će bar dva preživeti 5 dana.

R: a) $p_3 = 0,027$ b) $p_0 + p_1 = 0,7840$.

11. Firma je ubacivala u poštansko sanduče reklamu za svoje proizvode. U 20% slučajeva je dobila nove kupce. Ako se reklama ubaci u 30 sandučića naći:

a) očekivani broj novih kupaca b) verovatnoću da će firma da dobije bar jednog novog kupca c) verovatnoću da firma dobije očekivani broj novih kupaca.

(R: Ako je X broj novih kupaca $X \sim B(30, 0,2)$:

a) $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0,2 = 6$

$$b) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{30}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{30} = 0,9988$$

$$c) P(X = 6) = \binom{30}{6} \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^{24} = 0,17946$$

12. Računovodstvena služba poduzeća je utvrdila da zbog visoke inflacije 40% kupaca ne plaća račun na vreme. Ako se na slučajan način iz skupa računa izabere 6, kolika je verovatnoća: a) da su svi kupci na koje se odnose računi podmirili na vreme b) da ih je preko 3/4 podmirilo račune c) da 50% nije platilo račune na vreme.

13. Kocka se baca 12 puta. Izračunati aritmetičku sredinu, varijansu i najverovatniji broj dobijenih petica.

Rešenje:

$$X: B(12, \frac{1}{6})$$

$$\bar{X} = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2, \quad \sigma^2 = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1,6667.$$

$$(n+1) \cdot p - 1 \leq k \leq (n+1) \cdot p$$

$$1,17 \leq M_o \leq 2,17 \Rightarrow M_o = 2.$$

14. Odrediti zakon raspodele broja kišnih dana u mesecu junu, ako je verovatnoća kišnog dana $p = 0,2$. Izračunati aritmetičku sredinu, modus, varijansu, prvi i drugi Pirsonov koeficijent.

Rešenje:

Broj kišnih dana u junu je slučajna promenljiva $X: 0, 1, \dots, 30$ čije su verovatnoće

$$p_i = \binom{30}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{30-i}.$$

$$E(X) = 30 \cdot 0,2 = 6. \quad 5,2 < M_o < 6,2 \Rightarrow M_o = 6.$$

$$\sigma^2 = 30 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 4,8.$$

$$\beta_1 = \frac{(0,8 - 0,2)^2}{4,8} = 0,075. \quad \beta_2 = 3 + \frac{1 - 6 \cdot 0,2 \cdot 0,8}{4,8} = 3,01.$$

15. U 50 petočlanih porodica posmatran je broj radno sposobnih članova.

Broj članova	0	1	2	3	4	5
Broj porodica	2	7	15	17	8	1

- Ispitati saglasnost date empirijske distribucije sa teorijskom binomnom distribucijom poređenjem empirijskih apsolutnih frekvencija sa očekivanim apsolutnim frekvencijama.
 - Uporediti moduse, varijanse i koeficijente varijacije empirijske i teorijske distribucije.
 - Uporediti oblik empirijske i teorijske distribucije.
16. Šta je verovatnije: da se u pet bacanja homogene kocke dobije jedna šestica ili u šest bacanja da se dobije jedna šestica?
17. Šta je verovatnije da se u 4 bacanja jedne kocke dobije jedna šestica, ili u 24 bacanja dve kocke da se dobiju dve šestice.

(Uputstvo: Izračunati p_1 za raspodele $B(4, \frac{1}{6})$ i $B(24, \frac{1}{36})$).

18. U 3200 porodica sa petoro dece koliki broj porodica može da se očekuje sa:
a) pet dečaka b) sa najviše dva dečka. (R: a) 100, b) 1600).
19. Jaja su pakovana u kutije od 12 komada. Verovatnoća da je jaje razbijeno je 0,35. Izračunati verovatnoću da je u slučajno odabranoj kutiji a) 4 razbijena jajeta b) najviše 2 razbijena jajeta. (R: a) 0,235. b) 0,0151).
20. Student polaže test koji ima 5 pitanja. Na svako pitanje su ponuđena 4 odgovora od kojih je samo jedan tačan. Izračunati verovatnoću da će student koji slučajno zaokružuje odgovor da a) tačno odgovori na prvo pitanje (R:0,25). b) tačno da odgovori na jedno pitanje (R:0,3955) c) tačno da odgovori na više od polovine pitanja.