POKAZATELJI CENTRALNE TENDENCIJE

Pokazatelji centralne tendencije (srednje vrednosti) su:

- Aritmetička sredina
- Geometrijska sredina
- Harmonijska sredina
- Medijana
- Modus

Aritmetička sredina

Prosta aritmetička sredina

Prosta aritmetička sredina jednaka je količniku zbira svih vrednosti obeležja i njihovog broja.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{N}$$

Primer 1. Dužina radnog staža (u mesecima), osam pripravnika u jednoj fabrici data je u sledećoj seriji: 11 10 3 9 4 11 8 7. Utvrditi prosečnu dužinu radnog staža pripravnika u posmatranoj fabrici.

Dužina radnog staža	**11**	**10**	**3**	**9**	**4**	**11**	**8**	**7**

Xi = dužina radnog staža N = broj pripravnika

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{N} \qquad \overline{X} = \frac{63}{8} = 7{,}875 \text{ meseci}$$

Ponderisana aritmetička sredina

Ponderisana aritmetička sredina dobija se na osnovu zbira vrednosti jedinica posmatranja koje su ponderisane odgovarajućim frekvencijama.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f_i X_i}{\Sigma f_i} \qquad \overline{X} = \frac{\Sigma f_i X_i}{N}$$

Primer 2. Na osnovu podataka o broju traktora u osamdeset posmatranih radnih organizacija izračunati aritmetičku sredinu (prosečan broj traktora po radnoj organizaciji).

Broj traktora X_i	Broj radnih organizacija f_i	$f_i X_i$
5	2	10
10	3	30
12	5	60
15	10	150
20	25	500
24	20	480
30	15	450
Σ	80	1680

$$\overline{X} = \frac{\Sigma f_i X_i}{\Sigma f_i}$$

$$\overline{X} = \frac{1680}{80} = 21$$ traktor/ rad.organ.

Osobine aritmetičke sredine

- Suma odstupanja pojedinih vrednosti obeležja od njihovog proseka jednaka je nuli.

$$\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right) = 0$$

- Suma kvadrata odstupanja obeležja od proseka je minimum.

$$\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \min$$

- Ako svakoj vrednosti obeležja dodamo ili oduzmemo konstantu, tada će nova vrednost aritmetičke sredine biti uvećana ili umanjena za vrednost konstante.

$$X_i \pm c = X_i' \rightarrow \overline{X} \pm c$$

- Ako svaku vrednost obeležja pomnožimo konstantom, nova vrednost aritmetičke sredine biće proizvod prethodno izračunate sredine i konstante.

$$X_i \cdot c = X_i' \rightarrow \overline{X} \cdot c$$

Primer 3. Utvrditi prosečnu veličinu farme (iskazano prosečnim brojem krava), na osnovu broja krava u pet farmi pre i posle sprovođenja odluke o izlučenju po deset krava sa svake farme

Broj krava pre izlučenja X_i	**Broj krava posle izlučenja X_i'**
132	122
118	108
124	114
166	156
170	160
Σ 710	**Σ 660**

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{N} = \frac{710}{5} = 142\,\textbf{\textit{grla}}$$

$$\overline{X}' = \frac{\Sigma X_i'}{N} = \frac{660}{5} = 132\,\textbf{\textit{grla}}$$

$$X_i' = X_i - c$$

$$\overline{X}' = \overline{X} \pm c$$

Skraćeno izračunavanje aritmetičke sredine

I Primena metoda proizvoljnog početka

1. Xi se transformiše u Yi $\mathbf{Y_i = X_i - k}$

k - je proizvoljni (radni) početak

Za vrednost k najčešće se uzima vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom.

2. Izračunava se prosečna vrednost transformisanog obeležja Yi

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{\Sigma f_i \mathrm{Y}_i}{\mathrm{N}}$$

3. Izračunava se prosečna vrednost obeležja Xi

$$\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{Y}} + k$$

II Primena metoda transformacije

1. Xi se transformiše u Zi

$$\mathrm{Z}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\mathrm{X}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{k}}{\boldsymbol{b}}$$

k - je obeležje sa najvećom frekvencijom
b - je veličina grupnog intervala

2. Izračunava se prosečna vrednost transformisanog obeležja Zi

$$\overline{\mathrm{Z}} = \frac{\Sigma f_i \mathrm{Z}_i}{\mathrm{N}}$$

3. Izračunava se prosečna vrednost obeležja Xi

$$\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{Z}} \cdot b + k$$

Primer 3. Na osnovu podataka sledeće serije treba utvrditi prosečan broj teladi po organizaciji.

Broj teladi	Broj organizacija fi	Sredine intervala Xi	fiXi	Yi =Xi - k	fiYi	Zi	fiZi
30-39	3	34,5	103,5	-30	-90	-3	-9
40-49	4	44,5	178,0	-20	-80	-2	-8
50-59	4	54,5	218,0	-10	-40	-1	-4
60-69	6	64,5	387,0	0	0	0	0
70-79	3	74,5	223,5	10	30	1	3
80-89	3	84,5	253,5	20	60	2	6
90-99	2	94,5	189,0	30	60	3	6
	25		1552,5		- 60		-6

Standardno izračunavanje: $\overline{X} = \frac{\Sigma f_i X_i}{\Sigma f_i}$ $\overline{X} = \frac{1552,5}{25} = 62,1\boldsymbol{tele}$

Primena metoda proizvoljnog početka: k = 64,5

$$Y_1 = 34,4 - 64,5 = -30$$
$$Y_2 = 44,5 - 64,5 = -20$$
$$Y_3 = 54,5 - 64,5 = -10$$
$$Y_4 = 64,4 - 64,5 = 0$$
$$Y_5 = 74,5 - 64,5 = 10$$
$$Y_6 = 84,5 - 64,5 = 20$$
$$Y_7 = 94,5 - 64,5 = 30$$

$$\overline{Y} = \frac{-60}{25} = -2,4$$

$$\overline{X} = \overline{Y} + \boldsymbol{k} = -2,4 + 64,5 = 62,1\boldsymbol{tele}$$

Primena metoda transformacije: k = 64,5 b = 10

$$Z_1 = \frac{34,5 - 64,5}{10} = -3$$
$$Z_2 = \frac{44,5 - 64,5}{10} = -2$$
$$Z_3 = \frac{54,5 - 64,5}{10} = -1$$
$$Z_4 = \frac{64,5 - 64,5}{10} = 0$$
$$Z_5 = \frac{74,5 - 64,5}{10} = 1$$
$$Z_6 = \frac{84,5 - 64,5}{10} = 2$$
$$Z_7 = \frac{94,5 - 64,5}{10} = 3$$

$$\overline{Z} = \frac{-6}{25} = -0,24$$

$$\overline{X} = 10 \cdot (-0,24) + 64,5 = 62,1\boldsymbol{tele}$$

Geometrijska sredina – GS

Geometrijska sredina se izračunava tako što se vrednosti obeležja međusobno pomnože i iz tog proizvoda izvuče koren čiji je izložilac jednak ukupnom broju podataka (N).

Kod negrupisanih podataka izračunava se prosta geometrijska sredina:

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[N]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{\boldsymbol{N}}}$$

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[N]{\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}} X_{\boldsymbol{i}}}$$

Praktično se geometrijska sredina izračunava pomoću logaritama:

$$\log G = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \ldots + \log X_N}{N}$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \log X_i}{N} \Rightarrow G = anti\log(\log G)$$

Ako imamo seriju grupisanih vrednosti obeležja u ''n'' grupa, izračunavamo ponderisanu geometrijsku sredinu.

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[N]{X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot X_{\boldsymbol{n}}^{f_n}}$$

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}^{f_i}}$$

$$\log G = \frac{f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \ldots + f_n \log X_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \Rightarrow G = anti\log(\log G)$$

Primer 1. Na osnovu podataka o prinosu pšenice u periodu od 2012-2016 godine utvrditi prosečan prinos izračunavanjem geometrijske sredine.

Godine	Prinos pšenice (t/ha) Xi	Log Xi
2012	2,80	0,4472
2013	3,41	0,5328
2014	2,73	0,4362
2015	3,47	0,5403
2016	4,49	0,6522
		2,6087

$$\boldsymbol{G} = \sqrt[N]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{\boldsymbol{N}}} = \sqrt[5]{2{,}8 \cdot 3{,}41 \cdot 2{,}73 \cdot 3{,}47 \cdot 4{,}49}$$

$$\boldsymbol{G} = 3{,}3245\boldsymbol{t} / \boldsymbol{ha}$$

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \log X_i}{N} \Rightarrow G = anti\log(\log G)$$

$$\log G = \frac{2{,}6087}{5} = 0{,}5217 \Rightarrow anti\log(0{,}5217) = 3{,}3246 t / ha$$

Primer 2. Izračunati geometrijsku sredinu za sledeću seriju podataka:

Broj krava Xi	Broj gazdinstava fi	Log Xi	filogXi
2	10	0,301	3,01
4	7	0,602	4,214
5	5	0,699	3,495
7	4	0,845	3,380
8	3	0,903	2,709
10	2	1,000	2,000
15	2	1,176	2,352
	33		21,16

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{21,16}{33} = 0,6412$$

$$G = anti\log(0,6412) = 4,38 krava$$

Primer 3. Izračunati prosečnu promenu broja svinja u SR Srbiji u periodu od 2006-2012 godine.

Godine	Broj svinja (milion)	Log Xi	$L_i = \frac{X_i}{X_{i-1}}$
2006	7,9	0,89763	-
2007	8,4	0,92428	1,0633
2008	8,4	0,92428	1,0000
2009	9,3	0,96848	1,1071
2010	8,7	0,93952	0,9355
2011	7,8	0,89209	0,8965
2002	8,5	0,92942	1,0897
		6,4757	

$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \log X_i}{N} \Rightarrow G = anti\log(\log G)$$

$$\log G = \frac{6,4757}{7} = 0,9251 \Rightarrow anti\log(0,9251) = 8,416 grla$$

$$G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} L_i} = \sqrt[6]{1,0633 \cdot 1 \cdot 1,1071 \cdot 0,9355 \cdot 0,8965 \cdot 1,0897} = \sqrt[6]{1,07583}$$

$$\log G = \frac{\log 1,07583}{6} = 0,00529$$

$$G = anti\log(0,00529) = 1,0123$$

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{G} - 1) \cdot 100 \Rightarrow \pm \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r} = (1,0123 - 1) \cdot 100 \Rightarrow \boldsymbol{r} = 1,23\%$$

Harmonijska sredina je recipročna vrednost aritmetičke sredine iz recipročnih vrednosti obeležja. Za negrupisane podatke izračunavamo prostu harmonijsku sredinu.

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}}$$

Ako su vrednosti obeležja grupisane u ''n'' grupa izračunavamo ponderisanu harmonijsku sredinu.

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{X_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{X_i}}$$

Primer 1. Za proizvodnju 100 litara mleka utrošeno je po jednoj kravi na jednom gazdinstvu 145 HJ, na drugom 130 HJ, a na trećem 120 HJ. Koliki je prosečan utrošak HJ po kravi za proizvodnju 100 litara mleka?

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}} = \frac{3}{\frac{1}{145} + \frac{1}{130} + \frac{1}{120}} = 130{,}63\,HJ$$

Primer 2. Kapital od 2.000.000 € obrne se jedanput za deset godina, kapital od 5.000.000 € za pet godina, a kapital od 3.000.000 € obrne se jedanput za tri meseca. Koliko iznosi prosečno vreme za koje se sva tri kapitala u iznosu od 10.000.000 € obrnu jedanput ?

***Xi* – vreme obrtaja**
***fi* - vrednost kapitala**

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{X_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{X_i}} = \frac{10.000.000}{\frac{2.000.000}{10} + \frac{5.000.000}{5} + \frac{3.000.000}{0{,}25}}$$

$$= 0{,}757\,god = 9\,mes.\,i\,3\,dana$$

Medijana

Neintervalna serija

Medijana je ona vrednost obeležja koja sređenu seriju podataka deli na dva jednaka dela.

Neparan broj podataka - $\boldsymbol{M_e} = X_{\frac{N+1}{2}}$

Primer 1. Na osnovu podataka o ukupnom prinosu kukuruza (t) utvrditi medijalnu vrednost.

Prinos kukuruza X_i	Sređena serija
1230	1200
1320	1230
1200	1320
1500	1500
1600	1600

$$\boldsymbol{M_e} = X_{\frac{5+1}{2}} = X_3 \rightarrow \boldsymbol{M_e} = 1320\boldsymbol{t}$$

N= 5

Paran broj podataka – $\boldsymbol{M_e} = \dfrac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2}$

Primer 2. Data je proizvodnja jaja u toku šest dana. Naći medijalnu vrednost.

Proizvodnja jaja X_i	Sređena serija
2110	1900
1900	1980
2170	2000
1980	2100
2100	2110
2000	2170

$$\boldsymbol{M_e} = \frac{X_{\frac{6}{2}} + X_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{X_3 + X_4}{2} = \frac{2000 + 2100}{2} = 2050$$

N= 6

Modus

Modus je najučestalija vrednost obeležja u nekoj seriji podataka. U seriji mogu biti jedan, dva ili tri modusa.

Negrupisani podaci

Primer 1. Na osnovu datih podataka o broju biljaka kukuruza (000) po ha površine utvrditi modalnu vrednost.

Broj biljaka X_i	**Sređena serija**
75	**45**
45	**50**
50	**55**
70	**60**
55	**65**
65	**65**
60	**70**
65	**70**
70	**75**

Mo = 65 Mo = 70

Primer 2. Odrediti medijalnu i modalnu vrednost za sledeću seriju:

Masa jagnjadi (kg) Xi	**Broj jagnjadi fi**	**Kumulativ**
3,9	**8**	**8**
4,2	**12**	**20**
4,3	**20**	**40**
4,5	**15**	**55**
4,6	**5**	**60**
	60	

$$N = 60 \Rightarrow \frac{N}{2} = 30$$

$$Me = 4{,}3kg$$

$$Mo = 4{,}3kg$$

Ukoliko su podaci predstavljeni kao intervalna distribucija frekvencija medijanu i modus izračunavamo primenom korigovanih formula.

Korigovana formula za medijanu: $$M_e = L + \left(\frac{N/2 - F_{Me-1}}{f_{Me}} \right) \cdot i$$

Korigovana formula za modus: $$M_o = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot i$$

Primer 3. Za prinos kukuruza meren na 24 hektara izračunati modus i medijanu.

Prinos kukuruza (t/ha)	Površina (ha)	Kumulativ
4,01 – 5,00	3	3
5,01 – 6,00	3	6
6,01 – 7,00	4	10
7,01 – 8,00	5	15
8,01 – 9,00	6	21
9,01 – 10,00	3	24
Σ	**24**	

$$M_e = 7 + \left(\frac{12 - 10}{5} \right) \cdot 1 = 7{,}4$$

$$M_o = 8 + \left(\frac{1}{1+3} \right) \cdot 1 = 8{,}25$$

Odnos između aritmetičke sredine, medijane i modusa

Ako su ova tri pokazatelja ista vrednost za neku seriju podataka, tada kažemo da je serija simetrična.
Ako je modus po vrednosti veći od aritmetičke sredine i medijane serija je negativno asimetrična.
Ako je aritmetička sredina vrednost veća od vrednosti modusa i medijane serija je pozitivno asimetrična.

Kvartili

Slično, kao što medijana uređenu statističku seriju fizički deli na dva jednaka dela, kvartili uređenu statističku seriju dele na 4 jednaka dela. Postoje tri kvartila, s tim da je drugi kvartil jednak medijani.

Neintervalna serija

Ukupan broj podataka je deljiv sa 4 (n=4k)

$$Q_1 = \frac{X_{\frac{n}{4}} + X_{\frac{n}{4}+1}}{2}$$

$$Q_3 = \frac{X_{\frac{3n}{4}} + X_{\frac{3n}{4}+1}}{2}$$

Ukupan broj podataka nije deljiv sa 4 (n≠4k)

$$Q_1 = X_{\frac{n}{4}+1}$$

$$Q_3 = X_{\frac{3n}{4}+1}$$

Primer 1. Utvrditi kvartile za sledeću seriju podataka>

Xi	**Uređena serija**
3,5	3,5
3,8	3,8
5,8	4,4
5,6	5,6
6,6	5,8
7,2	6,6
4,4	6,8
6,8	7,2

$$Q_1 = \frac{X_{\frac{n}{4}} + X_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{X_{\frac{8}{4}} + X_{\frac{8}{4}+1}}{2} = \frac{X_2 + X_3}{2} = \frac{3{,}8 + 4{,}4}{2} = 4{,}1$$

$$Q_3 = \frac{X_{\frac{3n}{4}} + X_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{X_{\frac{24}{4}} + X_{\frac{24}{4}+1}}{2} = \frac{X_6 + X_7}{2} = \frac{6{,}6 + 6{,}8}{2} = 6{,}7$$

Ukupna broj podataka je n=8 (deljivo sa 4).

Primer 2. Utvrditi kvartile za sledeću seriju podataka:

Xi	**Uređena serija**
4,3	3,3
3,9	3,5
3,3	3,6
4,4	3,9
4,1	3,9
3,5	4,1
3,6	4,1
3,9	4,3
4,1	4,4
4,4	4,4

$$Q_1 = X_{\frac{n}{4}+1} = X_{\frac{10}{4}+1} = X_{3,5} = X_3 = 3{,}6$$

$$Q_3 = X_{\frac{3n}{4}+1} = X_{\frac{30}{4}+1} = X_{8,5} = X_8 = 4{,}3$$

Ukupna broj podataka je n=10 (nije deljivo sa 4).

Za intervalnu seriju podataka koristimo slično kao kod medijane i modusa koristimo korigovane formule za izračunavanje kvartila.

$$\boldsymbol{Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - F_{Q_1-1}}{f_{Q_1}}\right) * i}$$

$$\boldsymbol{Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - F_{Q_3-1}}{f_{Q_3}}\right) * i}$$

Primer 3. Utvrditi kvartile za sledeću seriju podataka koja se odnosi na visinu biljaka boranije.

Visina biljaka	**Broj biljaka**	**Kumulativ**
13,1-14,0	3	3
14,1-15,0	8	11
15,1-16,0	11	22
16,1-17,0	17	39
17,1-18,0	9	48
18,1-19,0	2	50
Ukupno	**50**	

$$\boldsymbol{Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - F_{Q_1-1}}{f_{Q_1}}\right) * i = 15{,}1 + \left(\frac{\frac{50}{4} - 11}{11}\right) * 1 = 15{,}24}$$

$$\boldsymbol{Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - F_{Q_3-1}}{f_{Q_3}}\right) * i = 16,1 + \left(\frac{\frac{3*50}{4} - 22}{17}\right) * 1 = 17,01}$$