СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА

Једнодимензионална случајна променљива X је пресликавање у коме се сваки елементарни догађај из простора елементарних догађаја S пресликава у вредност са бројне праве.

Први корак у дефинисању случајне променљиве је дефинисање простора елементарних догађаја S, односно дефинисање и исписивање свих могућих елементарних догађаја.

За сваку случајно променљиву може се дефинисати закон вероватноће (закон расподеле) и функција расподеле.

Случајне променљиве се деле на прекидне (дискретне) и непрекидне (континуиране) у зависности да ли су вредности само неке тачке са бројне праве или све тачке из коначног или бесконачног интервала.

ПРЕКИДНЕ (ДИСКРЕТНЕ) СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Закон вероватноће случајне променљиве дискретног облика је скуп парова x_i p_i (i = 1,2,.....n) где је:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$0 \le p_i \le 1$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \\ p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_n \end{pmatrix}$$

Функција расподеле дефинише се као кумулатив вероватноћа :

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$0 \le F(x) \le 1$$

1. У кутији се налази пет белих и три црне куглице. Извлачи се куглица без враћања све док се не извуче бела куглица. Нека је случајна промењива X: број извучених црних куглица.

а) Наћи закон расподеле случајне промењиве X
б) Функцију расподеле случајне промењиве X

Решење:

а) Број извучених црних куглица је случајна промењива чије су вредности: 0, 1, 2 и 3.

Вероватноће појединих вредности су:

$$P(X=0)=\frac{5}{8}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$$

Закон расподеле случајне променљиве X је:

X: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{8} & \frac{15}{56} & \frac{5}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$

б) Функција расподеле је:

$$x < 0 \Rightarrow P(X \leq x) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{8} + \frac{15}{56} = 0{,}89$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{55}{56} = 0{,}98$$

$$x \geq 3 \Rightarrow P(X \leq x) = 1$$

Очекивана вредност случајне променљиве (математичко очекивање)

Очекивана вредност променљиве X код прекидног распореда је:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i} x_i p_i}$$

Особине:

1) $\boxed{E(cX) = cE(X)}$

2) $\boxed{E(c) = c}$

3) $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

4) Ако су X и Y независне случајне променљиве. $\longrightarrow$ $\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$

Пример 1:

Ако је E(X)=2 и E(Y)=3, израчунати очекивану вредност случајне променљиве: 5X+3Y- 2.

Решење:

E(5X+3Y- 2)= 5 E(X)+3 E(Y)- 2=10+9- 2=17

Пример 2:

Ако случајна променљива X има очекивану вредност 6, а Y очекивану вредност -3; и X и Y су независно расподељене, израчунати очекивану вредност променљиве $\frac{X}{2} + 4XY$

Решење:

$$E\left(\frac{X}{2} + 4XY\right) = \frac{1}{2}E(X) + 4E(XY) = \frac{1}{2}E(X) + 4E(X)E(Y) = 3 - 72 = -69$$

Варијанса случајне променљиве

Варијанса случајно променљиве X је:

$$\boxed{V(X) = E(X - \overline{X})^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Особине:

1) $\boxed{V(cX) = c^2 V(X)}$

2) $\boxed{V(X + c) = V(X)}$

3) Ако су X и Y независне случајне променљиве. $\rightarrow$ $\boxed{V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)}$

Пример 1:

Дат је закон расподеле случајне променљиве X:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 & \alpha \end{pmatrix}$$

Израчунати α и E(X) и V(X).

Решење:

$$\alpha = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}2 = 3{,}9$$

$$E(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}5 + 49 \cdot 0{,}2 = 18{,}9$$

$$V(X) = 18{,}9 - (3{,}9)^2 = 3{,}69$$

Пример 2:

На путу кретања аутомобила су четири семафора. Сваки од њих са вероватноћом p=0,4 дозвољава даље кретање. Описати случајну променљиву X: број семафора поред којих је аутомобил прошао до првог заустављања. Наћи очекивану вредност и варијансу случајне променљиве X.

Решење:

Случајна променљива X може за вредности да узме бројеве $\boxed{x_i = i}$

i = 0,...,4 са вероватноћама:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= P(X=0) = 0{,}6 \\
p_1 &= P(X=1) = 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24 \\
p_2 &= P(X=2) = 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}096 \\
p_3 &= P(X=3) = 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}0384 \\
p_4 &= P(X=4) = 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4 = 0{,}0256
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x}_{\mathrm{i}} \mathrm{p}_{\mathrm{i}}$$

$$V(\mathrm{X}) = E(\mathrm{X}^2) - [E(\mathrm{X})]^2$$

$$E(\mathrm{X}) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}24 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}0384 + 4 \cdot 0{,}0256 = 0{,}6496$$

$$E(\mathrm{X}^2) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}24 + 4 \cdot 0{,}096 + 9 \cdot 0{,}0384 + 16 \cdot 0{,}0256 = 1{,}3792$$

$$V(\mathrm{X}) = 1{,}3792 - (0{,}6496)^2 = 0{,}9572$$

Дводимензиона прекидна (дискретна) расподела

Полазимо од две дискретне случајно променљиве:

X: $X_1, X_2, \ldots\ldots X_l$
Y: $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_k$

X / Y	Y_1 Y_2 .. .. Y_k	Σ
X_1 X_2 . . . X_l	f_{11} f_{12} ....f_{1k} f_{21} f_{22} ....f_{2k} . . . f_{l1} f_{l2} ....f_{lk}	$f_{1.}$ $f_{2.}$ . . . $f_{l.}$
Σ	$f_{.1}$ $f_{.2}$ ....$f_{.k}$	n

Релативна фреквенција (вероватноћа):

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Sigma\Sigma f_{ij}} = \frac{f_{ij}}{n}$$

X / Y	Y_1 Y_2 .. .. Y_k	$p_{i.}$
X_1 X_2 . . . X_l	p_{11} p_{12} ....p_{1k} p_{21} p_{22} ....p_{2k} . . . $p_{l\,1}$ $p_{l\,2}$ ....$p_{l\,k}$	$p_{1.}$ $p_{2.}$ . . . $p_{l\,\cdot}$
$p_{.j}$	$p_{.1}$ $p_{.2}$ ....$p_{.\,k}$	$\Sigma\Sigma p_{ij}$

f_{ij} -апсолутне фреквенције

$p_{i.}$ (i=1,…,l)–збир вероватноћа редова- маргиналне вероватноће за X
$p_{.j}$ (j=1,…,k)– збир вероватноћа колона- маргиналне вероватноће за Y

Маргиналне вероватноће представљају збир вероватноћа по редовима или по колонама.

Маргинална вероватноћа за X:

$$p(X=X_1) = p(X_1,Y_1) + p(X_1,Y_2) + ...+ p(X_1,Y_k) = p_{1.}$$

Маргинална вероватноћа за Y:

$$p(Y=Y_1) = p(Y_1,X_1)+ p(Y_1,X_2)+ ....+ p(Y_1,X_l) = p_{.1}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{l} p_{i.} = \sum_{j=1}^{k} p_{.j} = 1}$$

Израчунавање условних вероватноћа

X под условом Y $\longrightarrow$ X/Y

$$p_{i/j} = \frac{p\left(X = X_i, Y = Y_j\right)}{p\left(Y = Y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

Y под условом X $\longrightarrow$ Y/X

$$p_{j/i} = \frac{p\left(X = X_i, Y = Y_j\right)}{p\left(X = X_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Пример 1:

У табели је дата је дводимензионална расподела:

а) одредити маргиналне расподеле за X и Y.

б) одредити условне расподеле за X и Y.

ц) израчунати очекиване вредности и варијансе за X и Y, коваријансу и коефицијент корелације.

д) испитати да ли су X и Y независне променљиве.

X / Y	1	3	5	pi.
-1	0,1	0,08	0,04	0,22
0	0,05	0,2	0,05	0,30
1	0,12	0,05	0,04	0,21
2	0,1	0,1	0,07	0,27
p.j	0,37	0,43	0,20	1,00

Решење:

а) Маргиналне вероватноће за X:

$$p_{1.} = p(X=-1) = p(X=-1, Y=1) + p(X=-1, Y=3) + p(X=-1, Y=5)$$
$$p_{1.} = 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}22$$

$$p_{2.} = p(X=0) = p(X=0, Y=1) + p(X=0, Y=3) + p(X=0, Y=5)$$
$$p_{2.} = 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}3$$

$$p_{3.} = p(X=1) = p(X=1, Y=1) + p(X=1, Y=3) + p(X=1, Y=5)$$
$$p_{3.} = 0{,}12 + 0{,}05 + 0{,}04 = 0{,}21$$

$$p_{4.} = p(X=2) = p(X=2, Y=1) + p(X=2, Y=3) + p(X=2, Y=5)$$
$$p_{4.} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}07 = 0{,}27$$

Маргиналне вероватноће за Y:

$$p_{.1} = p(Y=1) = p(X=-1; Y=1) + p(X=0; Y=1) + p(X=1; Y=1) + p(X=2; Y=1)$$
$$p_{.1} = 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}1 = 0{,}37$$

$$p_{.2} = p(Y=3) = p(X=-1; Y=3) + p(X=0; Y=3) + p(X=1; Y=3) + p(X=2; Y=3)$$
$$p_{.2} = 0{,}08 + 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}43$$

$$p_{.3} = p(Y=5) = p(X=-1; Y=5) + p(X=0; Y=5) + p(X=1; Y=5) + p(X=2; Y=5)$$
$$p_{.3} = 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}07 = 0{,}2$$

б) **Условне расподеле за X и Y.**

X под условом Y   Y=1

$$X/Y=1:\begin{cases}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0{,}27 & 0{,}14 & 0{,}32 & 0{,}27\end{cases}$$

$$p_{1/1}=\frac{p(X=-1,Y=1)}{p(Y=1)}=\frac{p_{11}}{p_{.1}}=\frac{0{,}1}{0{,}37}=0{,}27$$

$$p_{2/1}=\frac{p(X=0,Y=1)}{p(Y=1)}=\frac{p_{21}}{p_{.1}}=\frac{0{,}05}{0{,}37}=0{,}14$$

$$p_{3/1}=\frac{p(X=1,Y=1)}{p(Y=1)}=\frac{p_{31}}{p_{.1}}=\frac{0{,}12}{0{,}37}=0{,}32$$

$$p_{4/1}=\frac{p(X=2,Y=1)}{p(Y=1)}=\frac{p_{41}}{p_{.1}}=\frac{0{,}1}{0{,}37}=0{,}27$$

Y под условом X Y/X = -1

$$Y / X = -1 : \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0{,}46 & 0{,}36 & 0{,}18 \end{Bmatrix}$$

$$p_{1/1} = \frac{p\left(X = -1, Y = 1\right)}{p\left(X = -1\right)} = \frac{p_{11}}{p_{1.}} = \frac{0{,}1}{0{,}22} = 0{,}46$$

$$p_{1/2} = \frac{p\left(X = -1, Y = 3\right)}{p\left(X = -1\right)} = \frac{p_{12}}{p_{1.}} = \frac{0{,}08}{0{,}22} = 0{,}36$$

$$p_{1/3} = \frac{p\left(X = -1, Y = 5\right)}{p\left(X = -1\right)} = \frac{p_{13}}{p_{1.}} = \frac{0{,}04}{0{,}22} = 0{,}18$$

ц) очекиване вредности и варијансе за X и Y, коваријанса и коефицијент корелације

$$E(X) = \sum_i x_i p_{i.} = (-1 \cdot 0{,}22) + (0 \cdot 0{,}3) + (1 \cdot 0{,}21) + (2 \cdot 0{,}27) = 0{,}53$$

$$E(X^2) = (1 \cdot 0{,}22) + (0 \cdot 0{,}3) + (1 \cdot 0{,}21) + (4 \cdot 0{,}27) = 1{,}51$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1{,}51 - (0{,}53)^2 = 1{,}2291$$

$$E(Y) = \sum_j y_j p_{.j} = (1 \cdot 0{,}37) + (3 \cdot 0{,}43) + (5 \cdot 0{,}2) = 2{,}66$$

$$E(Y^2) = (1 \cdot 0{,}37) + (9 \cdot 0{,}43) + (25 \cdot 0{,}2) = 9{,}24$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 9{,}24 - (2{,}66)^2 = 2{,}1644$$

Коваријанса

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(XY)=\sum\sum x_i y_j p_{ij}$$

$$E(XY)=(-1\cdot 1\cdot 0{,}1)+(-1\cdot 3\cdot 0{,}08)+(-1\cdot 5\cdot 0{,}04)+(0\cdot 1\cdot 0{,}05)+.....+(2\cdot 5\cdot 0{,}07)=1{,}43$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=1{,}43-0{,}53\cdot 2{,}66=0{,}0202$$

$\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$ $\longrightarrow$ **X и Y зависне случајне промењиве**

Коефицијент корелације

$$r_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$r_{XY}=\frac{0{,}0202}{\sqrt{1{,}2291\cdot 2{,}1644}}=0{,}0182$$

Утврђивање независности променљивих

$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0}$ → X и Y су зависне случајне променљиве

$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = 0}$ → Не може да се закључи независност случајних променљивих X и Y тако да следи провера

Провера

Ако су X и Y независне случајне променљиве тада за свако i и j следи:

$$\boxed{p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j) = p_{i.} p_{.j}}$$

Према томе треба проверити да ли је овај услов задовољен.

Пример 2:

Дата је дводимензионална расподела :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0	0
1	0.2	0.25	0.05	0
2	0	0.05	0.05	0.025
3	0	0	0.025	0.05

Израчунати вероватноћу да је апсолутна вредност разлике променљивих X и Y једнака 1.

Решење:

$$\begin{aligned}
P(|X-Y|=1) &= \sum_{|x-y|=1}\sum p_{X,Y}(x,y) \\
&= p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,2) \\
&\quad + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,2) \\
&= 0.2 + 0.2 + 0.05 + 0.05 + 0.025 + 0.025 \\
&= 0.55
\end{aligned}$$