TEORIJSKE DISTRIBUCIJE

Teorijske distribucije mogu biti prekidne i neprekidne.

Prekidne teorijske distribucije su:
- Binomna distribucija BD
- Poasonova distribucija PD
- Hipergeometrijska distribucija

Kod neprekidnih obeležja najčešće se susreću:
- Normalna (Gausova) Distribucija ND
- Studentova (t) distribucija
- Fišerova (F) distribucija
- $\chi 2$ distribucija

Binomna distribucija – BD

Relativna frekvencija (verovatnoća) za svako x =i data je izrazom:

$$\boxed{f_{(i)} = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}}$$

Rekurentni obrazac:

$$\boxed{f_{(i+1)} = f_{(i)} \cdot \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{p}{q}}$$

Primer 1. Verovatnoća da je neko lice u porodici zaposleno iznosi 0,6. Ako posmatramo 200 tročlanih porodica, izračunati sve moguće verovatnoće i odrediti oblik datog rasporeda. Utvrditi broj porodica u kojima su svi članovi zaposleni.

$$\boxed{\begin{aligned} n &= 3 \\ i &= 0,1,2,3 \\ p &= 0,6 \\ q &= 0,4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{f_{(0)} = q^n = 0,4^3 = 0,064}$$

$$\boxed{f_{(1)} = \binom{3}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^2 = 0,288}$$

$$\boxed{f_{(2)} = \binom{3}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^1 = 0,432}$$

$$\boxed{f_{(3)} = \binom{3}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^0 = 0,216}$$

$$\boxed{\beta_1 = \frac{(q-p)^2}{npq} = \frac{(0,4-0,6)^2}{3 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 0,06}$$

$$\boxed{\beta_2 = 3 + \frac{1-6pq}{npq} = 3 + \frac{1-6 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{3 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 2,389}$$

$$\boxed{F_{(3)} = f_{(3)} \cdot N = 0,216 \cdot 200 = 43,2 \approx 43}$$

Poasonova distribucija PD

Relativne frekvencije Poasonove distribucije date su izrazom:

$$f_{(i)} = e^{-m} \cdot \frac{m^i}{i!}$$

Rekurentni obrazac:

$$f_{(i+1)} = f_{(i)} \cdot \frac{m}{i+1}$$

Primer 2. Za transport kukuruza u jednom danu angažovano je 50 traktora. Raspored traktora prema broju kvarova dat je u tabeli. Izračunati Poasonove verovatnoće, apsolutne frekvencije, Pirsonove koeficijente i grafički prikazati empirijski i Poasonov raspored.

Broj kvarova (x_i)	Broj traktora (f_i)	$f_i x_i$	$f_{(i)}$	$f_{(i)} \cdot N$	$F_{(i)}$
0	21	0	0.40657	20.3285	20
1	18	18	0.36591	18.2957	18
2	7	14	0.16466	8.233	8
3	3	9	0.0494	2.4699	3
4	1	4	0.01346	0.6729	1
Σ	50	45	1		50

$$\overline{X} = m$$

$$\overline{X} = \frac{f_i x_i}{N} = \frac{45}{50} = 0{,}9$$

$$f_{(i+1)} = f_{(i)} \cdot \frac{m}{i=1}$$

$$f_{(0)} = e^{-m}$$

$$f_{(0)} = 2{,}718^{-0{,}9} = 0{,}40657$$

$$F_{(o)} = f_{(o)} \cdot N = 0{,}40657 \cdot 50 = 20{,}329 \approx 20$$

$$f_{(0+1)} = f_{(0)} \cdot \frac{m}{0+1} = 0{,}40657 \cdot \frac{0{,}9}{0+1} = 0{,}365913$$

$$F_{(1)} = f_{(1)} \cdot N = 0{,}365913 \cdot 50 = 18{,}2957 \approx 18$$

$$f_{(1+1)} = 0{,}365913 \cdot \frac{0{,}9}{1+1} = 0{,}164661$$

$$F_{(2)} = f_{(2)} \cdot N = 0{,}164661 \cdot 50 = 8{,}2330 \approx 8$$

$$f_{(2+1)} = 0{,}164661 \cdot \frac{0{,}9}{2+1} = 0{,}049398$$

$$F_{(3)} = f_{(3)} \cdot N = 0{,}049398 \cdot 50 = 2{,}4699 \approx 3$$

$$f_{(3+1)} = 0{,}049398 \cdot \frac{0{,}9}{3+1} = 0{,}013459$$

$$F_{(4)} = f_{(4)} \cdot N = 0{,}013459 \cdot 50 = 0{,}6729 \approx 1$$

$$\beta_1 = \frac{1}{m} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{1}{m} = 4{,}11$$

Normalna distribucija ND

Neprekidno obeležje X uzima vrednosti iz intervala od -∞ do +∞. Zakon verovatnoće posmatranog obeležja dat je izrazom:

$$\boxed{f_{(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

Ako obeležje nema za vrednost aritmetičke sredine 0, a za vrednost varijanse 1, izvodi se normalizacija (standardizacija) takvog obeležja na osnovu izraza:

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

Primena Normalne raspodele:

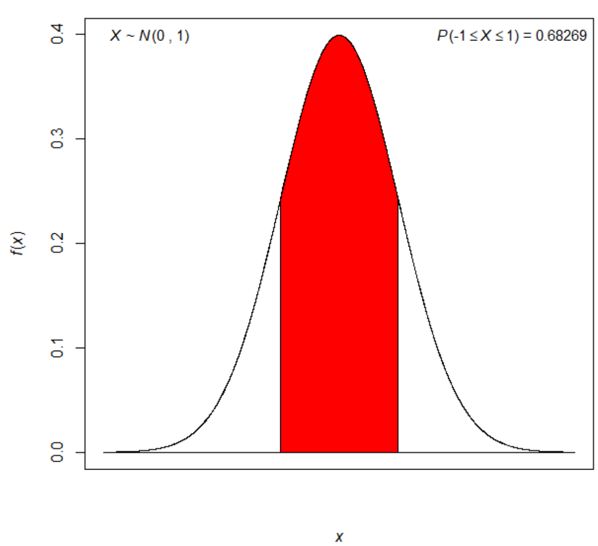
1. $P\,(-a \leq x \leq a) = 2\Phi(a)$

Primer1. Utvrditi verovatnoću da će se slučajno promenljiva *X* naći u intervalu od -1 do 1 ako važi da je aritmetička sredina 0 (μ=0) i varijansa 1 (σ^2=1).

Tražena verovatnoća se može zapisati:

$$P\,(-1 \leq x \leq 1) = 2\Phi(1)$$

Da bi se izračunala odgovarajuća verovatnoća, neophodno je utvrditi osenčenu površinu ispod krive. Kako se iz tablica Normalne raspodele raspolaže sa ukupnom površinom jedne polovine ispod krive, neophodno je najpre izračunati $\Phi(1)$ što iznosi 0,3413. S obzirom na to da su leva i desna strana površine ispod krive jednake, konačno rešenje glasi: $2\Phi(1) = 0{,}6826$.



2. $P\,(a \leq x \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

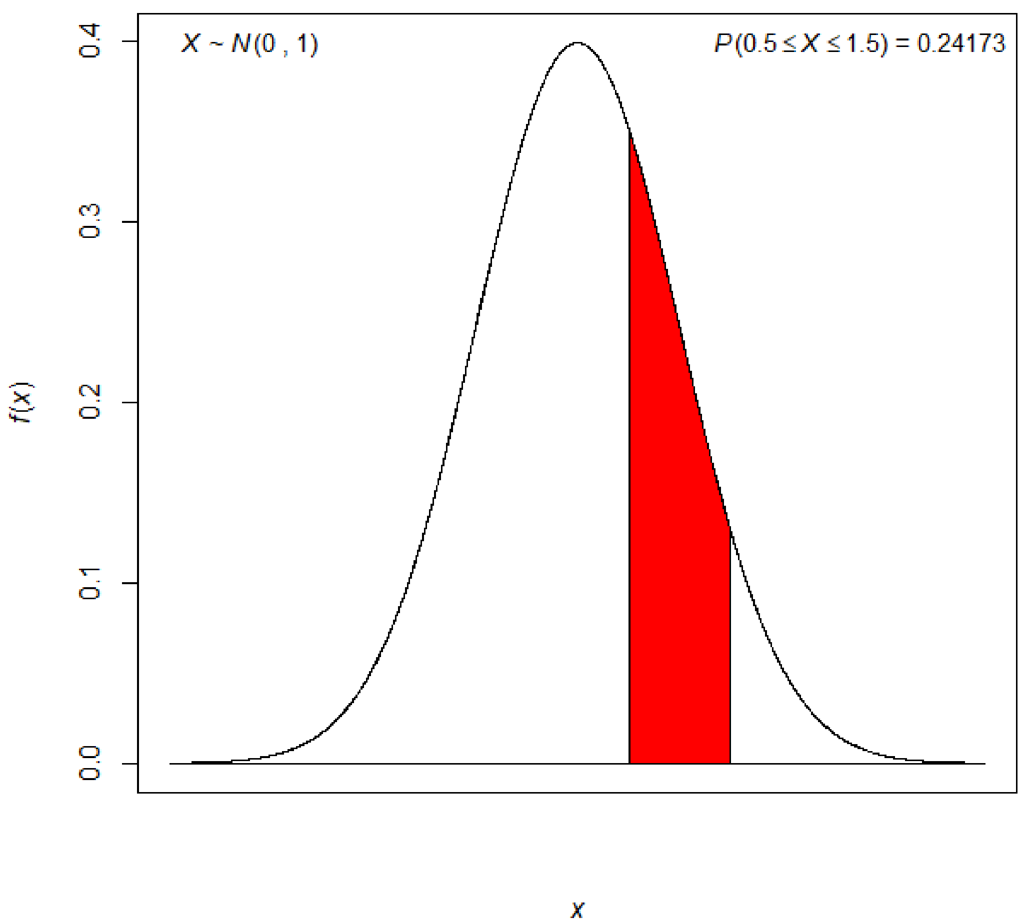
Primer 2. Utvrditi verovatnoću da će se slučajno promenljiva *X* naći u intervalu od 0,5 do 1,5, ako važi da je aritmetička sredina 0 (μ=0) i varijansa 1 (σ^2=1).

Tražena verovatnoća se može zapisati:

$$P\,(0{,}5 \leq x \leq 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5)$$

Kako se na osnovu vrednosti iz tablice Normalne raspodele može utvrditi površina odsečaka samo za jednu polovinu površine ispod krive, potrebno je najpre utvrditi $\Phi(1{,}5)$ = 0,4332 a zatim od te površine oduzeti $\Phi(0{,}5) = 0{,}1915$. Tražena verovatnoća glasi:

$P\,(0{,}5 \leq x \leq 1{,}5)$ = 0,2417



3. $P\,(-b \leq x \leq a) = \Phi(a) + \Phi(b)$

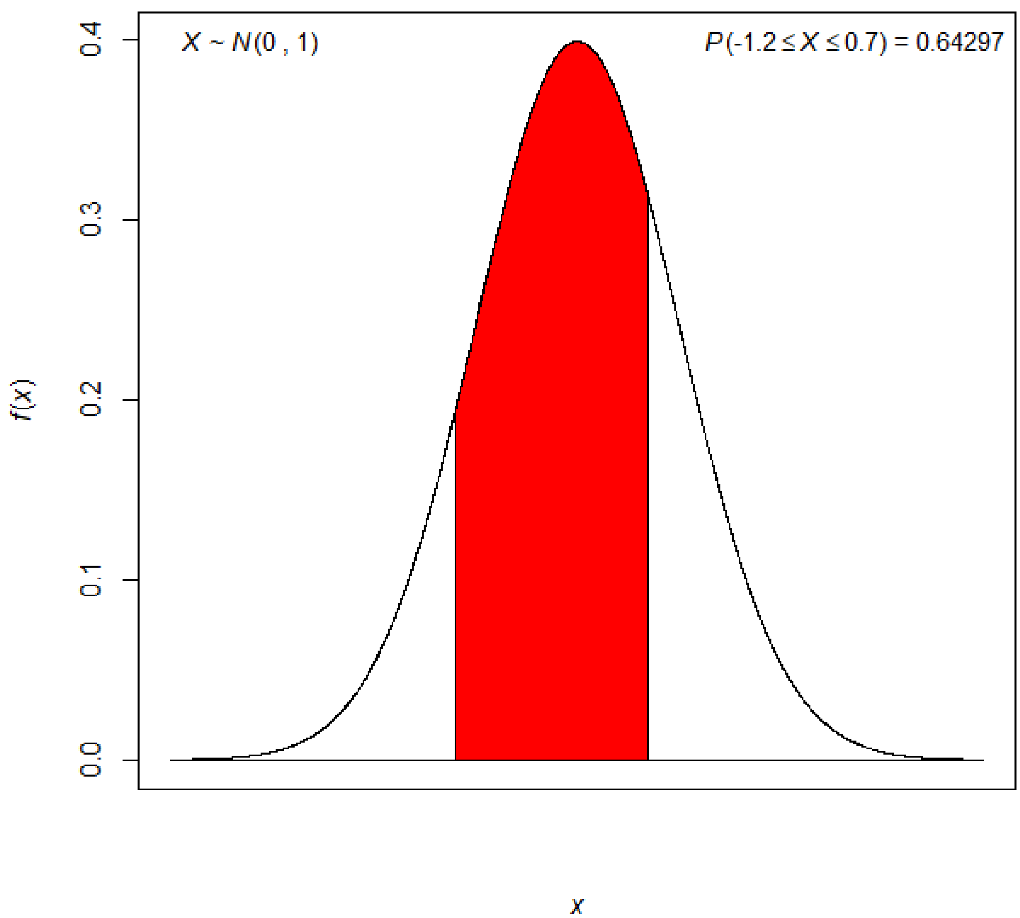
Primer 3. Utvrditi verovatnoću da će se slučajno promenljiva *X* naći u intervalu od -1,2 do 0,7, ako važi da je aritmetička sredina 0 (μ=0) i varijansa 1 (σ^2=1).

Tražena verovatnoća se može zapisati:

$$P\,(-1{,}2 \leq x \leq 0{,}7) = \Phi(-1{,}2) + \Phi(0{,}7)$$

Do tražene površine će se doći tako što se prvobitno utvrditi $\Phi(-1{,}2)$ (ili može se reći i $\Phi(1{,}2)$ jer su leva i desna strana površine ispod krive jednake) što iznosi 0,3849. Zatim se utvrdi $\Phi(0{,}7)$ što iznosi 0,2580. Tražena verovatnoća glasi:

$$P\,(-1{,}2 \leq x \leq 0{,}7) = \Phi(-1{,}2) + \Phi(0{,}7) = 0{,}3849 + 0{,}2580 = 0{,}6429$$



4. $P(-b \leq x \leq -a) = \Phi(-b) - \Phi(-a) = \Phi(b) - \Phi(a)$

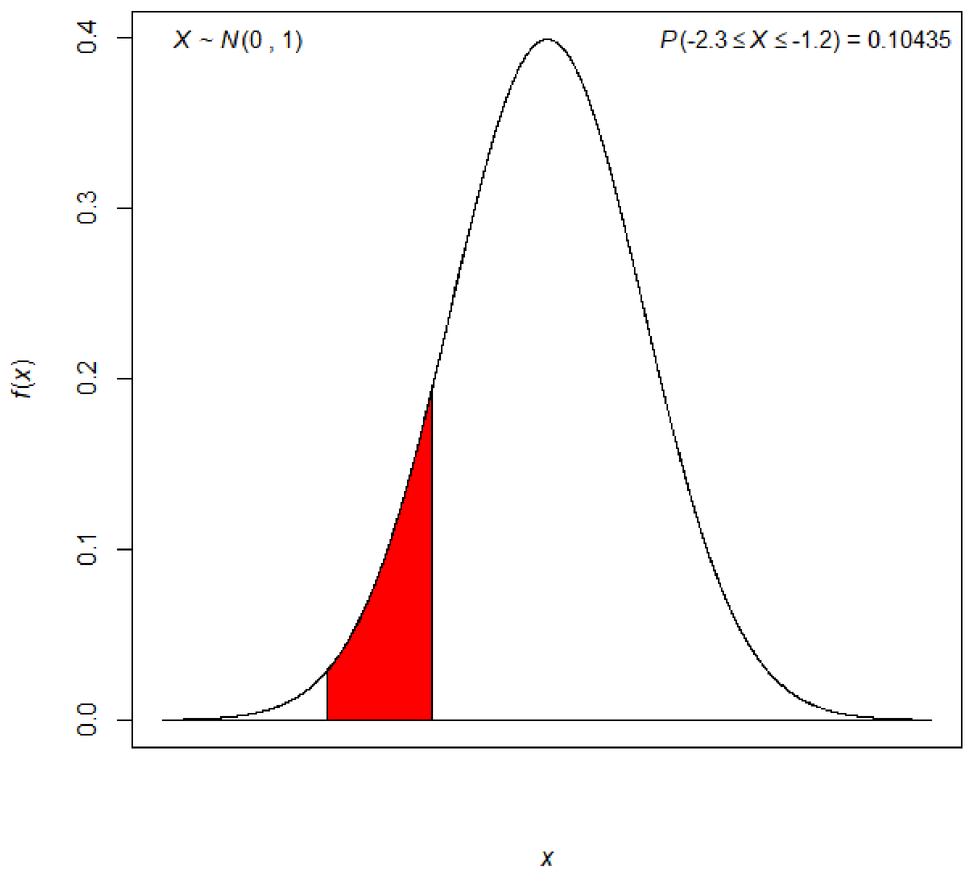
Primer 4. Utvrditi verovatnoću da će se slučajno promenljiva *X* naći u intervalu od -2,3 do -1,2, ako važi da je aritmetička sredina 0 (μ=0) i varijansa 1 (σ^2=1).

Tražena verovatnoća je:

$$P(-2{,}3 \leq x \leq -1{,}2) = \Phi(-2{,}3) - \Phi(-1{,}2) = \Phi(2{,}3) - \Phi(1{,}2)$$

Da bi se utvrdila tražena verovatnoća pristup je isti kao u primeru 2, samo što se inicijalne vrednosti nalaze na levoj strani *X* ose. Konačno rešenje glasi:

$$P(-2{,}3 \leq x \leq -1{,}2) = \Phi(-2{,}3) - \Phi(-1{,}2) = \Phi(2{,}3) - \Phi(1{,}2) = \\ = 0{,}4893 - 0{,}3849 = 0{,}1044$$



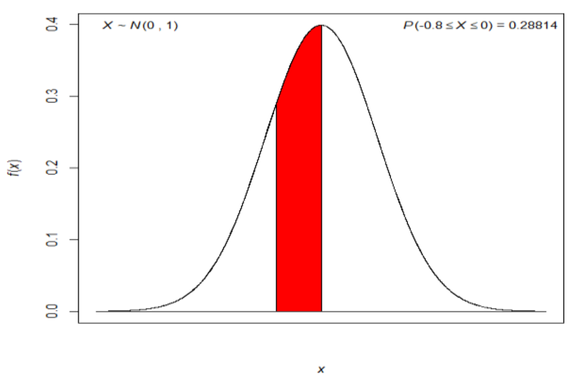
Primer 5. Kod 250 junadi prosečan dnevni prirast iznosi 0.8 kg sa varijansom 0.0625kg^2.

a) Izračunati verovatnoću da je prosečan dnevni prirast junadi 0.6-0.8kg.
b) Izračunati očekivan broj junadi sa prosečnim dnevnim prirastom 0.6-0.8kg.

Ukupan broj podataka iznosi 250 (N=250), aritmetička sredina 0,8kg a varijansa 0,0625 kg^2. Kako je prekršen uslov da je aritmetička sredina 1 a varijansa 0, neophodno je izvršiti transformaciju obeležja primenom sledećeg obrasca: $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

X_1=0,6
X_2=0,8
μ=0,8
σ^2=0,0625=$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$

a)
$P\,(0{,}6 \leq x \leq 0{,}8) = P\left(\frac{0{,}6-0{,}8}{0{,}25} \leq x \leq \frac{0{,}8-0{,}8}{0{,}25}\right) = P(-0{,}8 \leq x \leq 0) = \Phi(-0{,}8) = \Phi(0{,}8) = 0{,}2881$



Dakle, verovatnoća da će se prosečan dnevni prirast kretati u interval od 0,6 do 0,8 kg iznosi 0,2881.

b)

Da bi utvrdili očekivani broj prasadi sa prethodno utvrđenim prirastom neophodno je izračunatu verovatnoću pomnožiti sa ukupnim broj junadi:

$$F_i = P_i * N = 0{,}2881 * 250 = 72{,}025 \approx 72$$